

TROISIÈME GROUPE DE COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DES TORSEURS UNIVERSELS SUR LES SURFACES RATIONNELLES

YANG CAO

RÉSUMÉ. Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k -surface projective et lisse géométriquement rationnelle. Soit \mathcal{T} un torseur universel sur X possédant un k -point, et soit \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . C'est une question ouverte de savoir si \mathcal{T}^c est k -birational à un espace projectif. On sait que les deux premiers groupes de cohomologie non ramifiée de \mathcal{T} et \mathcal{T}^c sont réduits à leur partie constante. On donne une condition suffisante en termes de la structure galoisienne du groupe de Picard géométrique de X assurant l'énoncé analogue pour les troisièmes groupes de cohomologie non ramifiée de \mathcal{T} et \mathcal{T}^c . Ceci permet de montrer que $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul si X est une surface de Châtelet généralisée, et que ce groupe est réduit à sa partie 2-primaire si X est une surface de del Pezzo de degré au moins 2.

Summary. Let k a field of characteristic zero. Let X be a smooth, projective, geometrically rational k -surface. Let \mathcal{T} be a universal torsor over X with a k -point et \mathcal{T}^c a smooth compactification of \mathcal{T} . There is an open question : is \mathcal{T}^c k -birational equivalent to a projective space ? We know that the unramified cohomology groups of degree 1 and 2 of \mathcal{T} and \mathcal{T}^c are reduced to their constant part. For the analogue of the third cohomology groups, we give a sufficient condition using the Galois structure of the geometrical Picard group of X . This enables us to show that $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ vanishes if X is a generalised Châtelet surface and that this group is reduced to its 2-primary part if X is a del Pezzo surface of degree at least 2.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Rappels	3
2.1. Cohomologie motivique	3
2.2. Variétés toriques	4
2.3. Variétés cellulaires	4
2.4. Torseurs universels	5
2.5. Accouplements avec les 0-cycles	6
3. Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ d'un torseur sous un tore	7
4. Cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ des torseurs universels sur une surface géométriquement rationnelle	12
5. Surfaces de Châtelet généralisées	19
6. Surfaces de del Pezzo	22
Références	27

1. INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique 0. Pour une variété X sur k et un faisceau étale F sur X , la cohomologie non ramifiée de X de degré n est ici par définition le groupe

$$H_{nr}^n(X, F) := H_{Zariski}^0(X, \mathcal{H}^n(X, F)),$$

où $\mathcal{H}^n(X, F)$ est le faisceau Zariski associé au préfaisceau $\{U \subset X\} \mapsto H_{\text{ét}}^n(U, F)$. Ces groupes sont des invariants k -birationnels des k -variétés intègres projectives et lisses ([CT95, Thm. 4.1.1]). Si X est projective, lisse et k -rationnelle, par [CT95, Thm. 4.1.1 et Prop. 4.1.4], on a $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ pour tous entiers $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$.

Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X [CTS87]. C'est une k -variété géométriquement rationnelle. En 1979, Colliot-Thélène et Sansuc [CTS80, Question Q1, p. 227] ont posé la question : si \mathcal{T} possède un point rationnel, la k -variété \mathcal{T} est-elle une k -variété k -rationnelle ? Cette question est toujours ouverte.

Un certain nombre d'invariants k -birationnels sont triviaux sur toute compactification lisse \mathcal{T}^c de \mathcal{T} . Ainsi les applications de restriction $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \rightarrow H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$ sont des isomorphismes pour $i = 1$ et $i = 2$. Le cas $i = 1$ est facile. Dans le cas $i = 2$, ceci dit que l'application de restriction $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(\mathcal{T}^c)$ sur les groupes de Brauer est un isomorphisme. Pour ce résultat, voir [CTS77, Thm. 1], [CTS87, Thm. 2.1.2], [HS, Prop. 1.8] et Théorème 2.8 ci-dessous. Par ailleurs, pour \mathcal{T} possédant un k -point, on sait (Proposition 2.12) que pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, l'image de $H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ dans $H_{nr}^i(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ est réduite à $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Dans le présent article, pour X, \mathcal{T} et \mathcal{T}^c comme ci-dessus, nous étudions les groupes

$$H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Dans [Cao], nous avons établi que $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

Les principaux résultats du présent article sont les suivants.

- (a) Le quotient $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.
- (b) Si $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$ (Théorème 4.7). Pour établir ce résultat, nous appliquons aux torseurs sous un tore une technique développée par A. Merkurjev [Me13] pour étudier les torseurs sous un groupe semisimple.
- (c) Si X est une surface de Châtelet généralisée, c'est-à-dire un fibré en coniques sur \mathbb{P}_k^1 possédant une section sur une extension quadratique de k , et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est nul (Théorème 5.1).
- (d) Si X est une surface projective, lisse, k -birationnellement équivalente à une surface de del Pezzo de degré ≥ 2 ou à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est purement 2-primaire (Théorème 6.7).

Conventions et notations.

Soit k un corps quelconque de caractéristique 0. On note \bar{k} une clôture algébrique.

Une k -variété X est un k -schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, $\text{Pic}(X) := H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard, $\text{Br}(X) := H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer, $CH^i(X)$ son groupe de Chow de codimension i et $CH_i(X)$ son groupe de Chow de dimension i . Pour X/k

projective, notons $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le groupe de classes des 0-cycles de degré 0. Pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, on note $\frac{H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$ le conoyau du morphisme $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Tous les groupes de cohomologie ou d'hypercohomologie utilisés dans cet article sont des groupes de cohomologie étale, sauf les groupes de cohomologie de Zariski $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ à valeurs dans des faisceaux de K -théorie algébrique. Pour chaque schéma X , notons $D_{\text{ét}}^+(X)$ la catégorie dérivée bornée à gauche de la catégorie des faisceaux étales. Pour les propriétés de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, voir [KS, §13.1]. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la sous-catégorie $D_{\text{ét}}^{\geq n}(X) \subset D_{\text{ét}}^+(X)$ (cf. [KS, Notation 13.1.11]) et les foncteurs de la troncature $\tau^{\leq n}$ et $\tau^{\geq n}$ ([KS, Déf. 12.3.1 et Prop. 13.1.5]).

Soit T un k -tore. Notons $T^* = \text{Hom}_{\bar{k}\text{-gp}}(T_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m, \bar{k}})$ le réseau galoisien défini par le groupe des caractères géométriques du tore T .

Pour un groupe abélien A et un entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $A[n] := \{x \in A, nx = 0\}$ et A_{tors} le sous-groupe de torsion de A . On note $\text{Sym}^2 A$ la deuxième puissance symétrique de A , i.e. $A \otimes_{\mathbb{Z}} A / \sim$, où \sim est engendré par $a \otimes b \sim b \otimes a$; et on note $\wedge^i A$ la i -ième puissance extérieure de A . Si $A \cong A_1 \oplus A_2$, on a des isomorphismes naturels

$$\text{Sym}^2 A_1 \oplus (A_1 \otimes A_2) \oplus \text{Sym}^2 A_2 \xrightarrow{\sim} \text{Sym}^2 A \quad \text{et} \quad \wedge^2 A_1 \oplus (A_1 \otimes A_2) \oplus \wedge^2 A_2 \xrightarrow{\sim} \wedge^2 A \quad (1.1)$$

Si A est un réseau, on a la suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \wedge^2 A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \text{Sym}^2 A \rightarrow 0$$

où $\wedge^2 A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ envoie $a \wedge b$ sur $a \otimes b - b \otimes a$.

2. RAPPELS

Dans cette section, on fait des rappels sur plusieurs sujets : cohomologie motivique, variétés toriques, variétés cellulaires, toseurs universels et leur cohomologie à coefficients \mathbb{G}_m . Soit k un corps de caractéristique 0.

2.1. Cohomologie motivique. Notons $K_i(A)$ le i -ième groupe de K -théorie de Quillen d'un anneau A . Sur tout schéma X , on note \mathcal{K}_i le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$. On note $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ ses groupes de cohomologie pour la topologie de Zariski. Par résolution de Gersten (un théorème de Quillen, cf. [CTHK] pour une démonstration du cas général), si X est une k -variété lisse, le groupe $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ est le i -ième groupe de cohomologie du complexe :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_j(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{j-1}(k(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(i)}} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

On utilise le complexe motivique $\mathbb{Z}(r)$ de faisceaux de cohomologie étale sur les variétés lisses sur k pour $r = 0, 1, 2$, comme défini par Lichtenbaum ([L87] [L90]). On utilise le complexe motivique “de Lichtenbaum” pour pouvoir utiliser la méthode de Merkurjev dans [Me13]. Alors $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m[-1]$, et $\mathbb{Z}(2)$ est supporté en degré 1 et 2. Si X est un schéma de type fini sur k , on a un triangle dans $D_{\text{ét}}^+(\mathcal{T})$ pour $r = 0, 1, 2$:

$$\mathbb{Z}(r) \xrightarrow{n} \mathbb{Z}(r) \longrightarrow \mathbb{Z}/n(r) \xrightarrow{+1}. \quad (2.2)$$

De plus, on sait ([Ka96], cf. [CT15, §1]) :

Théorème 2.1. *Soit X une k -variété lisse géométriquement intègre de corps de fonctions $k(X)$.*

(i) *On a les égalités : $\mathbb{H}^0(X, \mathbb{Z}(2)) = 0$, $\mathbb{H}^1(X, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{indec}}(k(X))$, $\mathbb{H}^2(X, \mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{K}_2)$ et $\mathbb{H}^3(X, \mathbb{Z}(2)) = H^1(X, \mathcal{K}_2)$.*

(ii) *On a une suite exacte naturelle :*

$$0 \longrightarrow CH^2(X) \longrightarrow \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \longrightarrow 0. \quad (2.3)$$

2.2. Variétés toriques. Par [Su, Cor. 2] et [Oda, Thm. 1.10] on a :

Théorème 2.2. *Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une variété torique lisse sous le tore \mathbb{G}_m^n sur k . Alors pour chaque \mathbb{G}_m^n -orbite Z de codimension i , il existe une sous-variété torique ouverte $U \subset X$ telle que $Z \subset U$ et $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m^{n-i} \times \mathbb{A}^i$ comme variété torique, où l'action de \mathbb{G}_m^n sur $\mathbb{G}_m^{n-i} \times \mathbb{A}^i$ est la multiplication.*

Comme conséquence, on a :

Corollaire 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, soient Z_1, Z_2 deux \mathbb{G}_m^n -orbites de codimension 1 de X . Alors il existe un nombre fini de \mathbb{G}_m^n -orbites de codimension 2, notons-les S_j , telles que leurs adhérences schématiques satisfont $\overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} = \bigcup_j \overline{S_j}$.*

2.3. Variétés cellulaires.

Définition 2.4. [Ka97, Définition 3.2] Une variété X sur k a une décomposition cellulaire (brièvement : est cellulaire) s'il existe un sous-ensemble fermé propre $Z \subset X$ tel que $X \setminus Z$ soit isomorphe à un espace affine et Z ait une décomposition cellulaire.

Proposition 2.5. ([Cao, Prop. 2.2]) *Soit k un corps algébriquement clos.*

(1) *Une surface projective, lisse, k -rationnelle est cellulaire.*

(2) ([Fu93, Lemme, p. 103]) *Une variété torique, projective, lisse sur k est cellulaire.*

(3) *Soient T un tore sur k et T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soient X une variété cellulaire sur k et $Y \rightarrow X$ un T -torseur. Alors $Y^c := Y \times^T T^c$ est cellulaire.*

Par [Fu84, Exemple 19.1.11], on a

Théorème 2.6. *Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une variété lisse cellulaire sur k et n un entier. Pour tout entier i , le groupe $CH^i(X)$ est de type fini et sans torsion, et le morphisme de cycle $CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}/n \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}/n)$ est un isomorphisme. Pour tout entier i impair, on a $H^i(X, \mathbb{Z}/n) = 0$ et donc $H^i(X, \mathbb{Z}_l) = 0$ pour tout premier l .*

Proposition 2.7. *Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une variété lisse, connexe, rationnelle sur k . Si X est soit projective soit cellulaire, alors le morphisme canonique $\text{Pic}(X) \otimes k^\times \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Si X est projective, ceci résulte de A. Pirutka [Pi11, Prop. 2.6].

Si X est cellulaire, on fixe une décomposition cellulaire de X . Soient $n = \dim(X)$ et $U \subset X$ l'ouvert isomorphe à \mathbb{A}^n dans la décomposition cellulaire. Notons $Z := X \setminus U$. On a $H^0(U, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$, $H^1(U, \mathcal{K}_2) = 0$ et $\text{Pic}(X) \cong \text{Div}_Z(X)$. Par la résolution de Gersten (2.1), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow \ker(\psi) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2),$$

où $\psi : \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k(x)^\times \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{x \in Z^{(1)}} \mathbb{Z}$. Alors $H^0(X, \mathcal{K}_2) \cong H^0(U, \mathcal{K}_2)$ et $\ker(\psi) \cong H^1(X, \mathcal{K}_2)$.

Puisque $\text{div}(k^\times) = 0$, on a $\bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times \subset \ker(\psi)$. Pour tout $x \in Z^{(0)}$, il existe une unique sous-variété réduite localement fermée V_x dans la décomposition cellulaire telle que $x \in V_x$, $V_x \cong \mathbb{A}^{n-1}$ et $V_x \cap V_{x'} = \emptyset$ pour $x \neq x' \in Z^{(0)}$. Donc

$$k^\times \cong \ker(k(x)^\times \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus_{y \in V_x^{(1)}} \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \ker(\psi) \subset \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times.$$

Alors $\ker(\psi) \cong \bigoplus_{x \in Z^{(0)}} k^\times \cong \text{Div}_Z(X) \otimes k^\times \cong \text{Pic}(X) \otimes k^\times$ et le résultat en découle. \square

2.4. Torseurs universels. Soient X une k -variété lisse, T un k -tore et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un T -torseur. La composition $H^1(X, T) \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, T_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Hom}(T^*, \text{Pic}(X_{\bar{k}}))$ associée à $\mathcal{T} \rightarrow X$ un homomorphisme galoisien $T^* \xrightarrow{\text{type}} \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, appelé *le type du toseur*. Lorsque le type est un isomorphisme, on dit [CTS87] que $\mathcal{T} \rightarrow X$ est un *torseur universel* sur X .

Théorème 2.8. *Soit X une k -variété lisse, avec $\bar{k}^\times \cong \bar{k}[X]^\times$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ de type fini et sans torsion. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toseur universel. Soit T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^T T^c$.*

On a les propriétés suivantes :

(i) [CTS87, Thm. 2.1.2] $\bar{k}^\times \cong \bar{k}[\mathcal{T}]^\times$.

(ii) [CTS87, Thm. 2.1.2] $\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \cong 0$.

(iii) [CTS87, Thm. 2.1.2] *On a un isomorphisme de Γ_k -modules $\text{Div}_{\mathcal{T}^c - \mathcal{T}}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) \cong \text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)$.*

En particulier $\text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)$ est un module de permutation de type fini.

(iv) [HS, Thm. 1.6] *L'application naturelle $\text{Br}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Br}(\mathcal{T}_{\bar{k}})$ est un isomorphisme.*

(v) [CTS87, Rem. 2.8.4] *pour toute extension K/k de corps, si X_K est projective et K -rationnelle, alors \mathcal{T}_K est stablement K -rationnelle. Si de plus $K = \bar{k}$, alors \mathcal{T}_K est rationnelle.*

Par la suite spectrale de Hochschild-Serre, on a : $k^\times \cong k[\mathcal{T}]^\times$, $\text{Pic}(\mathcal{T}) = 0$ et $\text{Br}(k) \cong \text{Br}_1(\mathcal{T})$. De plus, si $X_{\bar{k}}$ est \bar{k} -rationnelle, par le corollaire 2.9 ci-dessous, on a $\text{Br}(k) \cong \text{Br}(\mathcal{T})$.

Corollaire 2.9. *Sous les hypothèses du théorème 2.8, supposons que k est algébriquement clos et X est projective et rationnelle. Alors $\text{Br}(\mathcal{T}) = 0$, $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$, $H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$ et le groupe $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.*

Démonstration. Par le théorème 2.8 (iv), $\text{Br}(\mathcal{T}) = 0$. Par la suite de Kummer, et le théorème 2.8 (i) et (ii), ceci implique $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$ et $H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n) = 0$. Par le Théorème 2.1 et le triangle (2.2) sur $\mathbb{Z}(2)$, on a $0 \cong H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)[n]$ et $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)/n \hookrightarrow H^2(\mathcal{T}, \mathbb{Z}/n(2)) \cong 0$. Ainsi $H^0(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. \square

Comme conséquence, on a $\bar{k}[\mathcal{T}^c]^\times / \bar{k}^\times = 0$, $\text{Br}(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) = 0$, et $H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Z}/n) = 0$, mais ceci résulte déjà de la rationalité de la \bar{k} -variété projective et lisse $\mathcal{T}_{\bar{k}}^c$.

Corollaire 2.10. *Sous les hypothèses du théorème 2.8, supposons qu'il existe une extension finie K/k de corps de degré d telle que la variété X_K soit projective et K -rationnelle. Alors, pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, le groupe $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$ est annulé par d .*

Démonstration. D'après le théorème 2.8 (v), la K -variété \mathcal{T}_K est stablement K -rationnelle. Ainsi $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}_K^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))} = 0$ pour tous i, j . Puisque le transfert est bien défini pour $H_{nr}^i(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $H^i(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on peut définir le transfert $\frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}_K^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))} \xrightarrow{tr} \frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$. Un argument de restriction-inflation donne le résultat. \square

En utilisant la proposition 2.5(i), dans un précédent article j'ai établi :

Théorème 2.11. [Cao, Thm. 2.7] *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Alors le groupe $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.*

2.5. Accouplements avec les 0-cycles. Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre. Pour toute extension de corps K/k et tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$, on a un accouplement naturel :

$$A_0(X_K) \times H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

(voir [Me08, formule (3)]).

Proposition 2.12. *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que $\mathcal{T}^c(k) \neq \emptyset$. Alors l'homomorphisme*

$$H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow \frac{H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}{H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))}$$

est nul pour tous $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il existe une T -variété torique lisse T^c (cf. [CTHS, Cor. 1]). Puisque le groupe $H_{nr}^i(\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ est un invariant birationnel des variétés projectives et lisses, et que l'existence d'un k -point est un invariant k -birationnel des k -variétés projectives et lisses (lemme de Nishimura), on peut supposer que $\mathcal{T}^c \cong T^c \times^T \mathcal{T}$. Il existe alors un morphisme $\mathcal{T}^c \xrightarrow{\pi} X$ étendant $\mathcal{T} \rightarrow X$.

Soit T un tore tel que $T^* \cong \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Alors $\mathcal{T} \rightarrow X$ est un T -torseur, i.e. $[\mathcal{T}] \in H^1(X, T)$. Par [CTS80, §II.B], pour toute extension K/k de corps, $[\mathcal{T}]$ induit un homomorphisme

$$A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T) : \sum_i x_i \mapsto \sum_i \text{Res}_{K(x_i)/K} x_i^*[\mathcal{T}]$$

Puisque $[\mathcal{T}]|_{\mathcal{T}} = 0 \in H^1(\mathcal{T}, T)$ et que tout élément de $A_0(\mathcal{T}_K^c)$ équivaut à un élément supporté sur \mathcal{T}_K (lemme de déplacement facile sur les zéro-cycles sur une variété lisse), la composition des homomorphismes

$$A_0(\mathcal{T}_K^c) \xrightarrow{\pi_*} A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T) : \sum_i t_i \mapsto \sum_i \text{Res}_{K(t_i)/K} t_i^*(\pi^*[\mathcal{T}])$$

est nulle.

D'après [CT83, Prop. 4] et [CTS81, Thm. 3], pour toute extension K/k de corps, le morphisme $A_0(X_K) \xrightarrow{\theta} H^1(K, T)$ est injectif. Ainsi le morphisme $A_0(\mathcal{T}_K^c) \xrightarrow{\pi_*} A_0(X_K)$ est nul.

Pour toute extension K/k de corps, on a des accouplements compatibles :

$$\begin{array}{ccccc} A_0(\mathcal{T}_K^c) & \times & H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) & \xrightarrow{(\cdot)_{\mathcal{T}^c}} & H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \\ \downarrow \pi_* & & \uparrow \pi^* & & \downarrow = \\ A_0(X_K) & \times & H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) & \xrightarrow{(\cdot)_X} & H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)). \end{array}$$

Soit $t \in \mathcal{T}^c(k)$, $K := k(\mathcal{T})$ et $\eta \in \mathcal{T}$ le point générique. Alors $t - \eta \in A_0(\mathcal{T}_K^c)$ et, pour tout $\alpha \in H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, on a

$$(t, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} - (\eta, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} = (t - \eta, \pi^* \alpha)_{\mathcal{T}^c} = (\pi_*(t - \eta), \alpha)_X = (0, \alpha)_X = 0 \in H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

Puisque $(\eta, -)_{\mathcal{T}^c}$ est l'inclusion canonique $H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \subset H^i(k(\mathcal{T}^c), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ et

$$\text{Im}(t, -)_{\mathcal{T}^c} \subset \text{Im}(H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))),$$

on a $\text{Im}(\pi^*) \in \text{Im}(H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{nr}^i(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)))$. \square

3. COHOMOLOGIE MOTIVIQUE À COEFFICIENTS $\mathbb{Z}(2)$ D'UN TORSEUR SOUS UN TORE

Dans [Me13], A. Merkurjev a étudié la cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ pour un toreur sous un groupe semisimple. Nous reprenons sa méthode pour étudier les toreurs sous un tore. Soient T un tore sur k de dimension N , et $f : Y \rightarrow X$ un toreur sous T sur X , où X est une k -variété lisse géométriquement intègre. On calcule la relation entre la cohomologie motivique de X et celle de Y à coefficients dans le complexe $\mathbb{Z}(2)$ (Théorème 3.5).

Dans ce cas, on a deux triangles dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux étales :

$$\mathbb{Z}_X(1) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \rightarrow \mathbb{Z}_X(1)[1], \quad (3.1)$$

et

$$\mathbb{Z}_X(2) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \mathbb{Z}_X(2)[1] \quad (3.2)$$

qui définissent $\mathbb{Z}_f(1)$ et $\mathbb{Z}_f(2)$.

Pour chaque Γ_k -module M continu discret, on peut voir M comme un faisceau étale sur le petit site étale $(\text{ét}/k)$, et son image inverse sur le grand site étale est noté également par M . Ainsi $\bigwedge^* T^*$ est un faisceau étale.

Proposition 3.1. *On a $\tau^{\leq 2} \mathbb{Z}_f(1) \cong T^*[-1]$ et donc $\tau^{\leq 2}(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) \cong \mathbb{G}_m \otimes T^*[-2]$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}_X(1) = \mathbb{G}_m[-1]|_X$ et $\mathbb{Z}_Y(1) = \mathbb{G}_m[-1]|_Y$, on a : $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(1)) \cong \mathbb{G}_m|_X$, $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_X(1)) = 0$ pour tout $i \neq 1$ et $\mathcal{H}^i(Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) = R^{i-1}f_*(\mathbb{G}_m|_Y)$ pour tout i . Ainsi $\mathcal{H}^i(Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) = 0$ pour $i \leq 0$ et le faisceau $\mathcal{H}^2(Rf_* \mathbb{Z}_Y(1))$ est le faisceau étale associé au préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^2(f^{-1}U, \mathbb{Z}(1)) = \text{Pic}(f^{-1}U).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$ et U est le spectre d'un anneau local régulier. Dans ce cas on a $0 \cong \text{Pic}(U) \cong \text{Pic}(f^{-1}U)$. Donc $\mathcal{H}^2(Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) = 0$.

D'après [CTS87, Prop. 1.4.2], on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(1)) \rightarrow \mathcal{H}^1(Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) \rightarrow T^* \rightarrow 0.$$

D'après (3.1), on a $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_f(1)) \cong T^*$ et $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(1)) = 0$ pour $i \leq 0$ et $i = 2$. Ceci donne le premier énoncé.

Le deuxième énoncé résulte du fait : $\mathbb{G}_m \otimes^L (D_{\text{ét}}^{\geq 3}(X)) \subset D_{\text{ét}}^{\geq 2}(X)$ pour les catégories dérivées de \mathbb{Z} -faisceaux. \square

Ainsi $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) = 0$ pour $i \leq 1$ et on a un isomorphisme :

$$\mathbb{G}_m \otimes T^* \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)). \quad (3.3)$$

Si $Y \cong X \times T$, la projection $X \times T \rightarrow T$ induit une section de (3.1) :

$$T^*[-1] \cong \tau^{\leq 2} \mathbb{Z}_f(1) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1). \quad (3.4)$$

Le résultat principal de cette section est la Proposition 3.4, qui calcule $\mathbb{Z}_f(2)$.

Soit $T_0 := \mathbb{G}_m^N$. Puisque $H^0(T_0, \mathcal{K}_1) = k[T_0]^\times$, l'unité de T_0 induit un homomorphisme canonique $T_0^* \rightarrow H^0(\mathbb{G}_m, \mathcal{K}_1)$. Pour chaque variété lisse intègre U et tout $n \in \mathbb{N}$, le cup-produit

$$[H^n(U, \mathcal{K}_2) \otimes H^0(T_0, \mathcal{K}_0)] \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes H^0(T_0, \mathcal{K}_1)] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2)$$

induit un homomorphisme :

$$H^n(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2). \quad (3.5)$$

Lemme 3.2. *Soit $T_0 := \mathbb{G}_m^N$ et U une variété lisse intègre. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte canonique (où \cup est défini dans (3.5)) :*

$$0 \rightarrow H^n(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^n(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} H^n(U \times T_0, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^n(U, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Démonstration. Notons K_i^M les groupes de K -théorie algébrique de Milnor. Par [Me03, §4], pour toute variété lisse X , on a un complexe :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_j^M(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{j-1}^M(k(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(j)}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

et on note $A^i(X, K_j^M)$ les groupes de cohomologie de ce complexe.

Soit f_1, \dots, f_N une base de T_0^* . Ainsi $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_q}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq N}$ est un élément de $A^0(T_0, K_q)$. On affirme que $A^*(U \times T_0, K_*)$ est un $A^*(U, K_*)$ -module libre avec la base consistant des éléments $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_q}\}$ pour $q = 0, 1, \dots, N$ et tout q -uplet $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq N$. Pour $N = 1$, ceci est [Me03, Proposition 5.5]. Le cas général suit par récurrence (cf. [Me03, Corollaire 5.6]).

Pour K_2^M , on a

$$A^n(U \times T_0, K_2^M) \cong A^n(U, K_2^M) \oplus [\oplus_i A^n(U, K_1^M) \cup \{f_i\}] \oplus [\oplus_{i < j} A^n(U, K_0^M) \cup \{f_i, f_j\}].$$

Alors le cup-produit induit une injection (l'analogue de (3.5))

$$A^n(U, K_2^M) \oplus [A^n(U, K_1^M) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup_{1,1}} A^n(U \times T_0, K_2^M)$$

et $\text{coker}(\cup_{1,1}) \cong \oplus_{i < j} A^n(U, K_0^M) \cup \{f_i, f_j\}$. Alors le morphisme (cf. [Me03, (5.8)]) :

$$A^n(U, K_0^M) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow \text{coker}(\cup_{1,1}) : a \otimes (f_i \wedge f_j) \rightarrow a \cup \{f_i, f_j\}$$

est bien défini et c'est un isomorphisme. Ceci donne une suite exacte

$$0 \rightarrow A^n(U, K_2^M) \oplus [A^n(U, K_1^M) \otimes T_0^*] \xrightarrow{\cup} A^n(U \times T_0, K_2^M) \rightarrow A^n(U, K_0^M) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Pour tout corps F et $i = 0, 1, 2$, on a $K_i^M(F) \xrightarrow{\sim} K_i(F)$. D'après (2.1), pour $j = 0, 1, 2$, on a donc un isomorphisme canonique $A^i(X, K_j^M) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{K}_j)$. Ceci donne le résultat annoncé. \square

Lemme 3.3. *Les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2))$ sont nuls pour $i \leq 1$ et $i = 3$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{Z}_X(2)$ et $\mathbb{Z}_Y(2)$ sont supportés en degré 1 et 2, on a $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$ pour $i < 0$, $R^i f_* \mathbb{Z}_Y(2) = 0$ pour $i \leq 0$, $R^i f_* \mathbb{Z}_Y(2) \cong \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2))$ pour $i \geq 3$ et $\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_X(2)) = 0$. Ainsi on a une suite exacte longue dans la catégorie des faisceaux étales sur X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(2)) \xrightarrow{s} R^1 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \longrightarrow$$

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2)) \xrightarrow{s_1} R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow 0.$$

Les faisceaux $\mathcal{H}^1(\mathbb{Z}_X(2))$ et $R^1 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ sont les faisceaux étales associés aux préfaisceaux :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^1(U, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{ind}k}(U) \text{ et } U \longmapsto \mathbb{H}^1(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = K_{3, \text{ind}k}(f^{-1}U).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$, et dans ce cas on a $K_{3, \text{ind}k}(U) \cong K_{3, \text{ind}k}(f^{-1}U)$, car $K_{3, \text{ind}k}(U) \cong K_{3, \text{ind}k}(U \times \mathbb{G}_m^N)$ (cf. [EKIV, Lem. 6.2]). Donc s est un isomorphisme.

Les faisceaux $\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2))$ et $R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ sont les faisceaux étales associés aux préfaisceaux :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^2(U, \mathbb{Z}(2)) = H^0(U, \mathcal{K}_2) \text{ et } U \longmapsto \mathbb{H}^2(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = H^0(f^{-1}U, \mathcal{K}_2).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$, et dans ce cas le morphisme canonique $H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(f^{-1}U, \mathcal{K}_2)$ est injectif puisque que $f^{-1}U \rightarrow U$ admet alors une section. Donc s_1 est injectif.

On a donc établi $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$ pour $i \leq 1$.

Le faisceau $R^3 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ est le faisceau étale associé au préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathbb{H}^3(f^{-1}U, \mathbb{Z}(2)) = H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2).$$

Localement pour la topologie étale, $f^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{G}_m^N$. Notons $T_0 := \mathbb{G}_m^N$. Dans ce cas, par le lemme 3.2, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2) \oplus [H^1(U, \mathcal{K}_1) \otimes T_0^*] \rightarrow H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T_0^* \rightarrow 0.$$

Comme le faisceau associé à $\{U \longmapsto H^1(U, \mathcal{K}_*)\}$ est 0, le faisceau associé à $\{U \longmapsto H^1(f^{-1}U, \mathcal{K}_2)\}$ est 0. Donc $R^3 f_* \mathbb{Z}_Y(2)$ est 0, et $\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_f(2)) = 0$. \square

Notons $\mathbb{Z}_f(\otimes)$ le cône du morphisme $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)$. Soit θ la composition des morphismes

$$Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \xrightarrow{\theta_1} Rf_*(\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L f^* Rf_* \mathbb{Z}_Y(1)) \xrightarrow{\theta_2} Rf_*(\mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_Y(1)) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(2).$$

où θ_1 est le morphisme canonique induit par \otimes^L (cf. [F, p. 306]) et θ_2 est induit par le morphisme d'adjonction $f^* Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \rightarrow \mathbb{Z}_Y(1)$. Le morphisme θ induit un diagramme commutatif

de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)[1] \\
\downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \exists h_1 & (1) & \downarrow \\
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(\otimes) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)[1] \\
\downarrow \cup & & \downarrow \theta & & \downarrow \exists h_\otimes & (2) & \downarrow \cup[1] \\
\mathbb{Z}_X(2) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(2)[1].
\end{array} \tag{3.6}$$

Le morphisme $h_\otimes \circ h_1$ induit un morphisme

$$h_{1,1} : \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^* \stackrel{(3.3)}{\cong} \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)) \rightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)).$$

Si $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$, d'après (3.4), le morphisme $h_{1,1}$ est exactement le cup-produit.

Supposons que $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$ et X est géométriquement connexe sur k . Par le Lemme 3.2, il y a une composition de morphismes de groupes

$$H^0(Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)^{\Gamma_k} \rightarrow (H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_0) \otimes \wedge^2 T^*)^{\Gamma_k} \cong (\wedge^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\sim} (\wedge^2 T^*)(X),$$

où Γ_k est le groupe de Galois de k , et $(\wedge^2 T^*)(X)$ est le groupe de sections du faisceau $(\wedge^2 T^*)$ sur X .

En général, $p_1 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ est un toreur trivial et $p_2 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ est T -équivariant. Il y a un morphisme

$$h'_{0,2} : H^0(Y, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{p_2^*} H^0(Y \times_X Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow (\wedge^2 T^*)(Y) \cong (\wedge^2 T^*)(X).$$

Si $Y \cong X \times T$, le morphisme $h'_{0,2}$ est exactement $H^0(Y, \mathcal{K}_2) \rightarrow (\wedge^2 T^*)(X)$. Dans ce cas, $h'_{0,2}$ induit un morphisme des faisceaux $h'_{0,2} : R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \wedge^2 T^*$. La composition $\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_X(2)) \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Z}_Y(2) \rightarrow \wedge^2 T^*$ est nulle, parce que localement pour la topologie étale, c'est nul par le lemme 3.2. Donc il existe un morphisme

$$h_{0,2} : \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \wedge^2 T^*.$$

Nous pouvons maintenant établir :

Proposition 3.4. *On a $\tau^{\leq 3} \mathbb{Z}_f(2) \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2))[-2]$ et une suite exacte de faisceaux étales sur X :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^* \xrightarrow{h_{1,1}} \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)) \xrightarrow{h_{0,2}} \wedge^2 T^* \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

Démonstration. D'après le lemme 3.3, il suffit de montrer que localement pour la topologie étale la suite est exacte. Localement pour la topologie étale, $Y \xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{G}_m^N$, le résultat découle du lemme 3.2. \square

Explicitons ce que donne la cohomologie de cette suite exacte de faisceaux.

Théorème 3.5. *Soient X une k -variété lisse géométriquement connexe, T un k -tore et $f : Y \rightarrow X$ un T -torseur. Alors on a deux suites exactes longues de Γ_k -modules :*

$$0 \rightarrow \bar{k}[X]^\times \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \wedge^2 T^* \xrightarrow{h} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^0(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \mathbb{H}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \\ \longrightarrow H^1(Y_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \longrightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)) \longrightarrow \mathbb{H}^4(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_Y(2)), \end{aligned}$$

où :

- (1) le morphisme h est donné par : $a \wedge b \mapsto a \otimes \partial(b) - b \otimes \partial(a)$ avec $\partial : T^* \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ le morphisme associé au toseur $Y \rightarrow X$ sous le tore T ;
- (2) la composition de morphismes

$$\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \rightarrow \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)),$$

est induite par l'intersection :

$$\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* \xrightarrow{id \times \partial} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \times \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_X(2)).$$

Démonstration. Sur \bar{k} , on a $T^* \cong \mathbb{Z}^N$, donc

$$H^1(X_{\bar{k}}, \wedge^2 T^*) = 0 \quad \text{et} \quad H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,X} \otimes T^*) \cong H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_{m,X}) \otimes T^*$$

(le premier énoncé utilisant la lissité de X). D'après la Proposition 3.4, $\mathbb{H}^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) \cong H^{i-2}(X_{\bar{k}}, \mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_f(2)))$ pour chaque $i \leq 3$. En appliquant $H^i(X_{\bar{k}}, -)$ aux suites exactes (3.2) et (3.7), on déduit les deux suites exactes longues.

La composition dans l'énoncé (2) est induite par $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \rightarrow \mathbb{Z}_f(2) \rightarrow \mathbb{Z}_X(2)[1]$. D'après le carré (1) et (2) dans le diagramme (3.6), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes T^* & \xrightarrow{id \times \partial} & \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \otimes \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \\ \downarrow & & \downarrow \cup \\ \mathbb{H}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_f(2)) & \longrightarrow & CH^2(X_{\bar{k}}). \end{array}$$

L'énoncé (2) résulte du fait que \cup est l'intersection.

Établissons l'énoncé (1). On a un diagramme commutatif de triangles :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \downarrow +1
\end{array}$$

Par la définition de $\mathbb{Z}_f(\otimes)$, on a les triangles (cf. la démonstration de [BBD, Prop. 1.1.11]) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) &\xrightarrow{h_1} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \xrightarrow{+1}, \\
\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) &\xrightarrow{h_2} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow Rf_* \mathbb{Z}_Y(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1}
\end{aligned}$$

et donc

$$[\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \oplus [\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)] \xrightarrow{h_1+h_2} \mathbb{Z}_f(\otimes) \rightarrow \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1}.$$

Notons $\mathbb{Z}(\wedge)$ le cône de $\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{h_\otimes \circ h_1} \mathbb{Z}_f(2)$, où $\mathbb{Z}_f(\otimes) \xrightarrow{h_\otimes} \mathbb{Z}_f(2)$ est le morphisme dans le diagramme (3.6). Par la proposition 3.4, on a $\tau^{\leq 2} \mathbb{Z}(\wedge) \cong \wedge^2 T^*[-2]$.

Notons $\tau : \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1) \rightarrow \mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)$ l'isomorphisme canonique. Puisque le produit $\mathbb{Z}(1) \otimes^L \mathbb{Z}(1) \rightarrow \mathbb{Z}(2)$ est symétrique, on a $h_\otimes \circ h_1 \circ \tau = h_\otimes \circ h_2$ et un diagramme commutatif de triangles :

$$\begin{array}{ccccc}
[\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \oplus [\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_X(1)] & \xrightarrow{h_1+h_2} & \mathbb{Z}_f(\otimes) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) \xrightarrow{+1} \\
\downarrow id+\tau & & \downarrow h_\otimes & & \downarrow h_\cup \\
\mathbb{Z}_X(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1) & \xrightarrow{h_\otimes \circ h_1} & \mathbb{Z}_f(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(\wedge) \xrightarrow{+1},
\end{array} \tag{3.8}$$

et l'homomorphisme h est induit par le deuxième triangle. Puisque $\tau^{\leq 3}[\mathbb{Z}_f(1) \otimes^L \mathbb{Z}_f(1)] \cong (T^* \otimes T^*)[-2]$, le morphisme h_\cup induit un morphisme de faisceaux \bar{k} -constants : $T^* \otimes T^* \xrightarrow{h'_\cup} \wedge^2 T^*$. Donc on peut calculer h'_\cup en se ramenant au cas $Y \xrightarrow{\sim} X \times T$, et dans ce cas, h'_\cup est exactement le cup-produit. L'énoncé (1) découle du diagramme (3.8). \square

4. COHOMOLOGIE MOTIVIQUE À COEFFICIENTS $\mathbb{Z}(2)$ DES TORSEURS UNIVERSELS SUR UNE SURFACE GÉOMÉTRIQUEMENT RATIONNELLE

Soit k un corps de caractéristique 0. Soient X une surface projective lisse géométriquement rationnelle sur k , et $g : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X . Le résultat principal de cette section est le théorème 4.7.

Lemme 4.1. *Supposons que k est algébriquement clos. Soit X une k -variété projective, lisse, rationnelle, connexe. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toreur universel sous le tore T . Soit T^c une T -variété torique, projective, lisse. Soit $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^T T^c$. Soit Z une T -orbite de codimension l dans T^c . Notons $\mathcal{Z} := Z \times^T \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^c$. Alors \mathcal{Z} est lisse, $k[\mathcal{Z}]^\times = k^\times$, $\text{Pic}(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$, $\text{Br}(\mathcal{Z}) = 0$, $H^1(\mathcal{Z}, \mathbb{Z}/n) = 0$, $H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$ et $H^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Z}/n(1)) \cong (\mathbb{Z}/n)^l$.*

Démonstration. Notons $l' := \dim(T) - l$. Puisque Z est une T -orbite de codimension l , par le Théorème 2.2, il y a une sous-variété torique affine $U \subset T^c$ telle que $U \cong \mathbb{A}^l \times \mathbb{G}_m^{l'}$ comme variété torique et $Z \subset U$. Alors il y a un homomorphisme $\mathbb{G}_m^l \rightarrow T$ tel que $Z \xrightarrow{\sim} T/\mathbb{G}_m^l$. Donc \mathcal{Z} est l'image de \mathcal{T} par $H^1(X, T) \rightarrow H^1(X, T/\mathbb{G}_m^l)$. Donc \mathcal{Z} est lisse. Par [CTS87, §2.1] (ou [S, Prop. 6.10]), on a un diagramme commutatif à horizontales exactes ($\text{Pic}(T) = 0$) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k[X]^\times/k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{Z}]^\times/k^\times & \longrightarrow & (T/\mathbb{G}_m^l)^* & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k[X]^\times/k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{T}]^\times/k^\times & \longrightarrow & T^* & \xrightarrow{\cong} & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors $k[\mathcal{Z}]^\times = k^\times$ et $\text{Pic}(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$. Par [HS, Théorème 1.6] et le fait que X est rationnelle, on a $\text{Br}(\mathcal{Z}) = 0$. Ainsi $H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$. Le résultat se déduit de la suite de Kummer. \square

Lemme 4.2. *Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une k -variété projective, lisse, rationnelle et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toreur universel. Le morphisme naturel $H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est nul.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) \otimes k^\times & \xrightarrow{\theta} & H^1(X, \mathcal{K}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = \text{Pic}(\mathcal{T}) \otimes k^\times & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

D'après [Pi11, Prop. 2.6], le morphisme θ est un isomorphisme. On a $\text{Pic}(\mathcal{T}) = 0$ par le théorème 2.8. Donc $H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\mathcal{T}, \mathcal{K}_2)$ est nul. \square

Théorème 4.3. *Soit X une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre et géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un toreur universel de X . Alors on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et une suite exacte naturelle de Γ_k -modules :*

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

où \cup est induit par l'intersection $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \times \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(X_{\bar{k}})$.

Démonstration. Soient T^c une T -variété torique, projective, lisse et $\mathcal{T}^c := \mathcal{T} \times^T T^c$. Puisque $X_{\bar{k}}$ est rationnelle, $H_{nr}^3(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $\mathcal{T}_{\bar{k}}$ est rationnelle. Ainsi $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

Par la résolution de Gersten, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \ker(\psi)$$

où

$$\psi : \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}} H^2(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(1)}} H^1(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Soit S_1 l'ensemble des $T_{\bar{k}}$ -orbites de codimension 1 de $\mathcal{T}_{\bar{k}}^c$. Pour $Z \in S_1$, notons $\mathcal{Z} := Z \times^T \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^c$. Alors $S_1 = (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}$ et

$$\ker(\psi) \subset \oplus_{Z \in S_1} H_{nr}^2(\mathcal{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \subset \oplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c \setminus \mathcal{T}_{\bar{k}})^{(0)}} H^2(\bar{k}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

D'après le lemme 4.1, $\ker(\psi) = 0$, et donc $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Par le théorème 2.1, $CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$. En utilisant la fibration en tores, on voit que le morphisme de restriction $CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}})$ est surjectif. On conclut alors avec le lemme 4.2 et le théorème 3.5. \square

Corollaire 4.4. *Sous les hypothèses du théorème 4.3, soient $U \subset X$ un ouvert et $\mathcal{T}_U := \mathcal{T} \times_X U$. Supposons que $\text{codim}(X \setminus U, X) \geq 2$ et $H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$. Alors on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et une suite exacte naturelle de Γ_k -modules :*

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(U_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(U_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Puisque la cohomologie non ramifiée ne dépend pas des sous-ensembles de codimension ≥ 2 , on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $H_{nr}^3(U_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Par le théorème 2.1, $CH^2(U_{\bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) \cong \mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathbb{Z}(2))$. D'après le théorème 3.5, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{0} & H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(X_{\bar{k}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Sym}^2 \text{Pic}(U_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(U_{\bar{k}}) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Le résultat en découle. \square

Proposition 4.5. *Supposons que k est algébriquement clos. Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . Alors $CH^2(\mathcal{T}) = 0$.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{T}) \times \text{Pic}(\mathcal{T}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^2(X) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}). \end{array}$$

D'après le théorème 4.3, le morphisme $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\mathcal{T})$ est surjectif. Donc le morphisme $\text{Pic}(\mathcal{T}) \times \text{Pic}(\mathcal{T}) \rightarrow CH^2(\mathcal{T})$ est surjectif. Puisque $\text{Pic}(\mathcal{T}) = 0$, on a $CH^2(\mathcal{T}) = 0$. \square

Une conséquence immédiate du théorème 4.3 et de la proposition 4.5 est :

Corollaire 4.6. *Soient X une k -surface projective lisse rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . On a alors une suite exacte naturelle de réseaux galoisiens*

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Théorème 4.7. *Soient X une k -surface projective lisse géométriquement rationnelle et \mathcal{T} un torseur universel sur X . Alors*

- (1) *Les groupes $\mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2))$, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ et $CH^2(\mathcal{T})$ sont finis ;*
 (2) *On a des suites exactes*

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}(\mathbb{H}^5(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(X, \mathbb{Z}(2)))$$

et

$$(Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} \mathbb{Z} \cong CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \rightarrow 0;$$

- (3) *Si $H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. Par la Proposition 4.5 et le Théorème 4.3, $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0$, $\mathbb{H}^4(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) = 0$ et $H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est de type fini sans torsion. Ainsi $H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2))$ est fini. Par [CT15, §2.2] et le fait que $H^0(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible (Corollaire 2.9), on a une suite exacte :

$$\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(\mathcal{T}, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^1(k, H^1(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}(\mathbb{H}^5(k, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(X, \mathbb{Z}(2))).$$

La première suite exacte en découle. Par la suite exacte (2.3), les groupes $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ et $CH^2(\mathcal{T})$ sont finis.

Puisque $\mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) \cong CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$, on a $H^1(k, \mathbb{H}^4(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2))) = 0$. Une application du corollaire 4.6 donne (2).

Soit $F \subset \mathcal{T}$ un sous-ensemble fermé de codimension ≥ 2 . Alors $CH^2((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}) = 0$,

$$H_{nr}^3((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0 \quad \text{et donc} \quad H^4((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathbb{Z}(2)) = 0.$$

Par résolution de Gersten (2.1), on a un isomorphisme $H^0(\mathcal{T}_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^0((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ et donc $H^0((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. D'après [CT15, §2.2], on a un morphisme naturel injectif :

$$\mathbb{H}^4(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)), \quad (4.2)$$

qui est un isomorphisme si $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$.

Dans le cas (3), soient $x \in X(k)$, $U := X \setminus \{x\}$ et $\mathcal{T}_U := \mathcal{T} \times_X U$. Alors $\text{codim}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_U, \mathcal{T}) \geq 2$. Par la résolution de Gersten (2.1), on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathbb{Z} \cdot x \xrightarrow{\phi} CH^2(X_{\bar{k}}) \rightarrow CH^2(U_{\bar{k}}) \rightarrow 0.$$

Puisque ϕ est un isomorphisme, on a $H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$ et $CH^2(U_{\bar{k}}) = 0$. D'après le corollaire 4.4, $H^1(\mathcal{T}_{U, \bar{k}}, \mathcal{K}_2) \cong Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. D'après (4.2), $\mathbb{H}^4(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Z}(2))/\mathbb{H}^4(k, \mathbb{Z}(2)) = 0$. Une application du fait $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}_U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ donne (3). \square

Remarque 4.8. Dans le théorème 4.7, le critère $H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$ n'est pas birationnellement invariant. En fait, soit X une surface projective lisse géométriquement rationnelle avec $X(k) \neq \emptyset$ et X' un éclatement de X en un k -point. Supposons $H^1(k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})) \neq 0$. Alors $\text{Pic}(X'_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}$ et

$$H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X'_{\bar{k}})) \cong H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}).$$

Alors, même si $H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$, on a $H^1(k, Sym^2 \text{Pic}(X'_{\bar{k}})) \neq 0$.

Corollaire 4.9. *Sous les hypothèses du Théorème 4.7, le morphisme canonique $H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est surjectif.*

Démonstration. Par [CT91, Suite 3.10], on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow NH^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow CH^2(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Par le théorème 4.7, $CH^2(\mathcal{T})$ est fini, et donc $CH^2(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$. Alors le morphisme $H^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est surjectif. \square

Le résultat principal du reste de cette section est le théorème 4.13, qui donne le lien entre $H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $CH^2(\mathcal{T}_k^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c)$ pour un torseur universel \mathcal{T} sur une surface projective lisse géométriquement rationnelle et une certaine compactification \mathcal{T}^c . Ce résultat n'est pas utilisé dans la suite de l'article.

Lemme 4.10. *Soient X une variété projective lisse géométriquement rationnelle et $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X sous le tore T . Soient T^c une T -variété torique projective lisse, et $\mathcal{T}^c := T^c \times^T \mathcal{T}$. Soient Z' une composante connexe de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$ et $\mathcal{Z}' := \mathcal{T} \times^T Z' \subset \mathcal{T}^c$. Soit k' la clôture algébrique de k dans $k(\mathcal{Z}')$. Notons $\mathcal{Z}'_{\bar{k}} := \mathcal{Z}' \times_k \bar{k}$. Alors \mathcal{Z}' est une composante connexe de $(\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})_{\text{lisse}}$ et on a $k[\mathcal{Z}']^\times = k'^\times$, $\text{Pic}(\mathcal{Z}') \cong \text{Pic}(\mathcal{Z}'_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \cong \mathbb{Z}$ et $\text{Br}(k') \cong \text{Br}(\mathcal{Z}')$. De plus, si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{Z}'(k') \neq \emptyset$.*

Démonstration. Notons $N := \dim(T)$ et S_1 l'ensemble des T_k -orbites de T_k^c de codimension 1. Puisque la variété torique T_k^c est couverte par des $\mathbb{A}^l \times \mathbb{G}_m^{N-l}$ par le théorème 2.2, le lieu lisse $(T_k^c \setminus T_k)_{\text{lisse}}$ est la réunion des T_k -orbites de codimension 1. Les composantes connexes de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$ correspondent alors aux Γ_k -orbites de S_1 . Les composantes connexes de $(\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})_{\text{lisse}}$ correspondent aux composantes connexes de $(T^c \setminus T)_{\text{lisse}}$.

Supposons que $k' = k$. Ainsi \mathcal{Z}' et Z' sont géométriquement intègres sur k , c'est à dire que $\mathcal{Z}'_{\bar{k}}$ est une $T_{\bar{k}}$ -orbite de codimension 1. Alors $T \cup Z'$ est un ouvert de T^c , et $(T \cup Z')_{\bar{k}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m^{N-1}$. Donc $(T \cup Z')$ est affine. D'après [CX, Prop. 2.5], il existe une sous-variété torique fermée $(\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1)$ de $(T \hookrightarrow T \cup Z')$. Ainsi $\mathcal{Z}'(k) \neq \emptyset$. On note T' le tore qui correspond à $\bar{k}[T \cup Z']^\times / \bar{k}^\times$. Donc $T'_k \cong \mathbb{G}_m^{N-1}$ et on a un morphisme $T \hookrightarrow T \cup Z' \rightarrow T'$ tel que $T' \cong T/\mathbb{G}_m$. Puisque $\mathcal{Z}'(k) \neq \emptyset$, on a $\mathcal{Z}' \xrightarrow{\sim} T'$, et $\mathcal{Z}' \xrightarrow{\sim} T' \times^T \mathcal{T}$. Alors \mathcal{T} est un \mathbb{G}_m -torseur sur \mathcal{Z}' .

Par la suite exacte de Sansuc ([S, Prop. 6.10]), l'homomorphisme $\text{Br}(\mathcal{Z}') \rightarrow \text{Br}(\mathcal{T})$ est injectif et on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k[\mathcal{Z}']^\times / k^\times & \longrightarrow & k[\mathcal{T}]^\times / k^\times = 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{Z}') \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{T}) = 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{k}[\mathcal{Z}']^\times / \bar{k}^\times & \longrightarrow & \bar{k}[\mathcal{T}]^\times / \bar{k}^\times = 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathcal{Z}'_{\bar{k}}) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0. \end{array}$$

Donc $k[\mathcal{Z}']^\times = k'^\times$, $\text{Pic}(\mathcal{Z}') \cong \text{Pic}(\mathcal{Z}'_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \cong \text{Pic}(\mathcal{Z}'_{\bar{k}})$, $\text{Br}(k) \cong \text{Br}(\mathcal{Z}')$ et, si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, on a $\mathcal{Z}'(k) \neq \emptyset$.

En général, on a $\mathcal{Z}' \times_k \bar{k} \cong \mathcal{Z}' \times_{k'} (k' \times_k \bar{k}) \cong \sqcup_{[k':k]} \mathcal{Z}' \times_{k'} \bar{k}$. Le résultat en découle. \square

Sous les hypothèses du lemme 4.10, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\psi} & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T})^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta_\psi \\
 \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_k^c \setminus \mathcal{T}_k)^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\psi_k} & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_k^c \setminus \mathcal{T}_k)^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_k),
 \end{array} \quad (4.3)$$

où ψ , ψ_k sont définis par *div*.

Pour un Γ_k -ensemble M , notons $\mathbb{Z}^{\oplus M} := \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}$ un Γ_k -module de permutation. Notons M/Γ_k l'ensemble des Γ_k -orbites de M . Alors l'application de Γ_k -ensembles $M \rightarrow M/\Gamma_k$ induit une immersion canonique $\mathbb{Z}^{\oplus M/\Gamma_k} \subset \mathbb{Z}^{\oplus M}$ telle que $\mathbb{Z}^{\oplus M/\Gamma_k} = (\mathbb{Z}^{\oplus M})^{\Gamma_k}$.

Lemme 4.11. *Sous les hypothèses du lemme 4.10 et les notations ci-dessus, soit S_i le Γ_k -ensemble des T_k -orbites de T_k^c de codimension i . Alors, le morphisme θ_ψ induit des applications de Γ_k -modules :*

$$\text{Coker}(\psi) \cong \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_1/\Gamma_k} \subset \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_1} \cong \text{Coker}(\psi_k).$$

De plus, $\text{Coker}(\psi_k)$ est un Γ_k -module de permutation et $\theta_\psi : \text{Coker}(\psi) \cong \text{Coker}(\psi_k)^{\Gamma_k}$.

Démonstration. Pour une T_k -orbite Z , on note $\mathcal{Z} := Z \times^{T_k} \mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_k^c$. Alors on a un diagramme commutatif à horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_k^c \setminus \mathcal{T}_k)^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{Z \in S_1, x \in \mathcal{Z}^{(0)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \\
 \bigoplus_{Z \in S_2, x \in \mathcal{Z}^{(0)}} K_0(k(x)) & \hookrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_k^c \setminus \mathcal{T}_k)^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{Z \in S_1, x \in \mathcal{Z}^{(1)}} K_0(k(x)) & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\psi) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \bar{k}[\mathcal{Z}]^\times \xrightarrow{f_1} \bigoplus_{Z \in S_2} \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Coker}(\psi_k) \longrightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) \longrightarrow 0.$$

Par le Lemme 4.1, pour $Z \in S_1$, on a $\text{Pic}(\mathcal{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\bar{k}[\mathcal{Z}]^\times \cong \bar{k}^\times$ est divisible. Donc $f_1 = 0$, $\bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) = \mathbb{Z}^{\oplus S_1}$ et on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \rightarrow \text{Coker}(\psi_k) \rightarrow \bigoplus_{Z \in S_1} \text{Pic}(\mathcal{Z}) \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Soient $V_i \subset T^c$ un ouvert tel que $V_{i,\bar{k}}$ soit la réunion des T_k -orbites de T_k^c de codimension $\leq i$. Alors, pour tout $i \geq 1$, $V_i \setminus V_{i-1}$ est lisse et l'ensemble des composantes connexes est S_i/Γ_k . Par le même argument que ci-dessus, en utilisant le lemme 4.10, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} \rightarrow \text{Coker}(\psi) \rightarrow \bigoplus_{Z' \in S_1/\Gamma_k} \text{Pic}(\mathcal{Z}') \rightarrow 0.$$

Puisque $\text{Pic}(\mathcal{Z}') \cong \text{Pic}(\mathcal{Z}'_k)^{\Gamma_k}$ (lemme 4.10), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_2/\Gamma_k} & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_1/\Gamma_k} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \theta_{\psi,2} & & \downarrow \theta_\psi & & \downarrow \theta_{\psi,1} \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_2} & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_k) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus S_1} \longrightarrow 0,
 \end{array} \quad (4.5)$$

où $\theta_{\psi,1}, \theta_{\psi,2}$ sont induits par les quotients $S_1 \rightarrow S_1/\Gamma_k$ et $S_2 \rightarrow S_2/\Gamma_k$. On applique $(-)^{\Gamma_k}$ et on a $\theta_{\psi} : \text{Coker}(\psi) \cong \text{Coker}(\psi_{\bar{k}})^{\Gamma_k}$.

Puisque $\text{Ext}_{\Gamma_k}^1(\mathbb{Z}^{\oplus S_1}, \mathbb{Z}^{\oplus S_2}) \cong H^1(k, \mathbb{Z}^{\oplus S_2} \otimes (\mathbb{Z}^{\oplus S_1})^{\vee}) = 0$, il existe un Γ_k -homomorphisme $\mathbb{Z}^{\oplus S_1} \xrightarrow{\phi} \text{Coker}(\psi_{\bar{k}})$ qui scinde (4.4). Ainsi $\phi(\mathbb{Z}^{\oplus S_1/\Gamma_k}) \subset \text{Coker}(\psi)$ et ϕ scinde la première suite de (4.5). \square

Lemme 4.12. *Sous les hypothèses du lemme 4.11, soient $F \subset \mathcal{T}$ un sous-schéma fermé de codimension ≥ 2 et*

$$S_F := \{x \in F_{\bar{k}} : \text{tr}_{\bar{k}}(k(x)) = \dim(\mathcal{T}) - 2\}$$

un Γ_k -ensemble fini. Alors on a un diagramme commutatif de suites exactes de Γ_k -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{T} \setminus F, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F/\Gamma_k} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}^c) & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T} \setminus F) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & \text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c) & \longrightarrow & CH^2((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Démonstration. Notons $D := \mathcal{T}^c \setminus \mathcal{T}$. On a un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in D_{\bar{k}}^{(0)}} K_1(k(x)) & \xrightarrow{(\psi, 0)} & (\bigoplus_{x \in D_{\bar{k}}^{(1)}} \mathbb{Z}) \bigoplus (\bigoplus_{x \in S_F} \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(0)}} K_2(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(1)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{(2)}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(0)}} K_2(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(1)}} K_1(k(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in ((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}})^{(2)}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} .$$

Par la résolution de Gersten (2.1), les groupes de cohomologie horizontale de ce diagramme sont les groupes $H^i(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c, \mathcal{K}_2)$, resp $H^i((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)$. La suite exacte sur \bar{k} découle alors du lemme du serpent et du Lemme 4.2. La suite exacte sur k découle du même argument et la compatibilité est claire. \square

Théorème 4.13. *Soient X une surface projective lisse géométriquement rationnelle sur k et $g : \mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel de X sous le tore T . Soient T^c une T -variété torique projective lisse, et $\mathcal{T}^c := T^c \times^T \mathcal{T}$. Alors il existe un homomorphisme injectif de groupes finis :*

$$H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c),$$

qui est un isomorphisme si $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après le théorème 4.7 et la proposition 4.5, $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}) = 0$ et $CH^2(\mathcal{T})$ est fini. Il existe un sous-schéma fermé $F \subset \mathcal{T}$ de codimension ≥ 2 tel que $CH^2(\mathcal{T} \setminus F) = 0$. Par le lemme 4.12, puisque $H^1(k, \text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F}) = 0$, on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coker}(\psi) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F/\Gamma_k} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}^c) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Coker}(\psi_{\bar{k}}) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus S_F})^{\Gamma_k} & \longrightarrow & CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k} & \longrightarrow & H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Donc $CH^2(\mathcal{T}_{\bar{k}}^c)^{\Gamma_k}/CH^2(\mathcal{T}^c) \xrightarrow{\sim} H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2))$.

Dans le cas où $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, on note $t \in \mathcal{T}(k)$ un point, $x \in X(k)$ son l'image et \mathcal{T}_x la fibre. Alors $\mathcal{T}_x(k)$ est dense dans \mathcal{T}_x . Il existe un sous-schéma fermé $F_1 \subset X$ et un sous-schéma fermé $F_2 \subset \mathcal{T}$ de codimension ≥ 2 tels que F_1 soit fini, $F = g^{-1}(F_1) \cup F_2$ et F_2 ne contient pas de fibre de g . On peut supposer que $x \notin F_1$ (lemme de déplacement facile sur les zéro-cycles sur une variété lisse). Alors $\mathcal{T}_x \cap F \neq \mathcal{T}_x$ et donc $[\mathcal{T}_x \setminus (\mathcal{T}_x \cap F)](k) \neq \emptyset$. Ainsi on peut supposer plus que $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$.

D'après (4.2), on a un homomorphisme injectif :

$$H_{nr}^3(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow H^1(k, H^1((\mathcal{T} \setminus F)_{\bar{k}}, \mathcal{K}_2)),$$

qui est un isomorphisme si $(\mathcal{T} \setminus F)(k) \neq \emptyset$. L'énoncé résulte du fait $H_{nr}^3(\mathcal{T} \setminus F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. \square

5. SURFACES DE CHÂTELET GÉNÉRALISÉES

Dans cette section, X est une surface de Châtelet généralisée, c'est-à-dire un fibré en coniques sur \mathbb{P}_k^1 possédant une section sur une extension quadratique k' de k . Soient \mathcal{T} un torseur universel de X et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . Alors $X_{k'}$ est k' -rationnel et, par le corollaire 2.10, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est annulé par 2.

Le résultat principal de ce paragraphe est :

Théorème 5.1. *Soit X une variété lisse projective contenant un ouvert $\text{Spec } k[y, z, t]/(y^2 - az^2 = P(t))$, où $P(t)$ est un polynôme séparable. Soient \mathcal{T} un torseur universel de X et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que $X(k) \neq \emptyset$. Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. Si X et X_1 sont birationnellement équivalents, alors $X_1(k) \neq \emptyset$ et il existe un torseur universel \mathcal{T}_1^c de X_1 tel que \mathcal{T}^c et \mathcal{T}_1^c soient stablement birationnellement équivalents par [CTS87, Prop. 2.9.2]. Donc on a $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(\mathcal{T}_1^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. C'est-à-dire que l'on peut remplacer X par X_1 . Ainsi, comme dans [Sko, p. 135], on peut supposer que X est une variété qui vérifie les conditions de la proposition 5.2. Par la Proposition 5.2 ci-dessous, on a $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$. D'après le Théorème 4.7, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$. \square

Proposition 5.2. *Soient $P(t) \in k[t]$ un polynôme séparable de degré pair, $(P_i(t))_{i \in I}$ ses facteurs irréductibles, et $a \in k$ un élément tel que a n'est un carré de $k[t]/P_i(t)$ pour aucun $i \in I$ (i.e. chaque $P_i(t)$ est irréductible dans $k(\sqrt{a})[t]$). Soit X_1 (resp. X_2) une sous-variété fermée de*

$P^2 \times (P^1 \setminus \infty)$ (resp. de $P^2 \times (P^1 \setminus 0)$) avec les coordonnées $(y : z : u; t)$ (resp. $(y' : z' : u'; t')$) donnée par $y^2 - az^2 - P(t)u^2 = 0$ (resp. $(y')^2 - a(z')^2 - P((t')^{-1})(u')^2 = 0$). On recolle X_1 et X_2 sur $P^1 \setminus (0 \cup \infty)$ par $t = (t')^{-1}$, $y = y'$, $z = z'$ et $u = (t')^{n/2}u'$, et on la note par X . Notons $T^* := \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Alors on a $H^1(k, \text{Sym}^2 T^*) = 0$.

Notons $k' := k(\sqrt{a})$. Soient $\sigma \in \text{Gal}(k'/k)$ l'élément non-trivial, $(P_i(t))_{i \in I}$ facteurs irréductibles de $P(t)$, et $(e_{j_i})_{j_i \in J_i}$ les racines de $P_i(t)$. Soient $O_{i,i'}$ l'ensemble des $\Gamma_{k'}$ -orbites de $J_i \times J_{i'}$ si $i \neq i'$, et $O_{i,i}$ l'ensemble des $\Gamma_{k'}$ -orbites de $J_i \times J_i / \sim$, où \sim est donné par $(j_i, j'_i) \sim (j'_i, j_i)$. Soit Δ_i l'orbite diagonale de $O_{i,i}$. Pour une orbite S , on note $|S|$ le nombre des éléments de S . L'action de Γ_k sur J_i et $J_{i'}$ induit une action de σ sur $O_{i,i'}$. Ainsi $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$.

Lemme 5.3. *Si $|J_{i_0}|$ est impair, alors il existe au moins une orbite $S \in O_{i_0,i}$ pour chaque $i \neq i_0$, telle que $\sigma(S) = S$.*

Démonstration. Puisque l'action de $\Gamma_{k'}$ sur J_i est transitive, pour chaque orbite $S \in O_{i_0,i}$, $|S|$ est divisible par $|J_i|$. Donc si $S \neq \sigma(S)$, $|S \cup \sigma(S)|$ est divisible par $2 \cdot |J_i|$. Puisque $|J_{i_0} \times J_i| = |J_{i_0}| \cdot |J_i|$ et $|J_{i_0}|$ est impair, il existe au moins une orbite $S \in O_{i_0,i}$ telle que $\sigma(S) = S$. \square

Lemme 5.4. *Pour chaque i et chaque orbite $S \in O_{i,i}$, $|S|$ est divisible par $|J_i|/2$. De plus, si $|J_i|$ est pair, alors il existe au moins une orbite $S \in O_{i,i}$, telle que $\sigma(S) = S$ et $|S| = s \cdot |J_i|/2$, où s est un entier impair.*

Démonstration. Soit (j_i, j'_i) un élément de l'orbite $S \in O_{i,i}$. Pour l'action de $\Gamma_{k'}$, soit St_j (resp. $St_{j,j'}$) le stabilisateur de j_i (resp. de (j_i, j'_i)). Ainsi s'il y a $g \in \Gamma_{k'}$ tel que $g(j_i) = j'_i$ et $g(j'_i) = j_i$, alors

$$St_{j,j'} = (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)) \cup ((g \cdot St_j) \cap (g \cdot (g \cdot St_j \cdot g))) = (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)) \cup (g \cdot (St_j \cap (g \cdot St_j \cdot g)));$$

si non, $St_{j,j'}$ est un sous-groupe de St_j . Ainsi $[\Gamma_{k'} : St_{j,j'}]$ est divisible par $[\Gamma_{k'} : St_j]/2$, et donc $|S|$ est divisible par $|J_i|/2$.

Supposons que $|J_i|$ est pair. On a $|J_i \times J_i / \sim| = |J_i|(|J_i| - 1)/2$, où \sim est donné par $(j_i, j'_i) \sim (j'_i, j_i)$. D'après le même argument du Lemme 5.3, il existe au moins une orbite $S \in O_{i,i}$, telle que $\sigma(S) = S$ et $|S| = s \cdot |J_i|/2$, où s est un entier impair. \square

Démonstration de la Proposition 5.2. Soient F le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $t = \infty$, G le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(u, y - \sqrt{a}z)$, G' le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(u, y + \sqrt{a}z)$, D_{j_i} le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(t - e_{j_i}, y - \sqrt{a}z)$ et D'_{j_i} le diviseur de $X_{\bar{k}}$ défini par $(t - e_{j_i}, y + \sqrt{a}z)$, pour chaque $i \in I$ et chaque $j_i \in J_i$. Pour chaque $i \in I$, on note $D_i := \sum_{j_i \in J_i} D_{j_i}$ et $D'_i := \sum_{j_i \in J_i} D'_{j_i}$. Pour chaque orbite $S \in O_{i,i'}$, on note $D_S := \sum_{(j_i, j'_i) \in S} D_{j_i} \otimes D_{j'_i}$ et $D'_S := \sum_{(j_i, j'_i) \in S} D'_{j_i} \otimes D'_{j'_i}$.

D'après [CTSSD, Section 7], $T^* = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, $(D'_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F , G et G' , et les relations sont : $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$ et $D_{j_i} + D'_{j_i} = F$ pour chaque j_i . Ainsi $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré librement par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F et G , et l'action de $\Gamma_{k'}$ sur ces générateurs est de permutation. Donc l'action de $\Gamma_{k'}$ sur $\text{Sym}^2 T^*$ est aussi de permutation. Ainsi $H^1(k', \text{Sym}^2 T^*) = 0$. Donc on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) \rightarrow H^1(k, \text{Sym}^2 T^*) \rightarrow H^0(\text{Gal}(k'/k), H^1(k', \text{Sym}^2 T^*)) = 0.$$

Ainsi il suffit de montrer que l'on a $H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) = 0$.

L'idée de la démonstration de $H^1(\text{Gal}(k'/k), (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}) = 0$ est de trouver des sous-groupes $A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$, $l = 1, \dots, m$, tels que $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_l A_l$, le sous-groupe $\bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ soit $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant, et $H^1(k, A'_{l_0}) = 0$ pour tous les $l_0 = 1, \dots, m$, où $A'_{l_0} := \bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l / \bigoplus_{l=1}^{l_0-1} A_l$.

Puisque $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est engendré librement par $(D_{j_i})_{j_i \in \cup_i J_i}$, F et G , $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ est engendré librement par $F \otimes F$, $F \otimes G$, $G \otimes G$, $(F \otimes D_i)_{i \in I}$, $(G \otimes D_i)_{i \in I}$ et $(D_S)_{S \in \cup_{i,i'} O_{i,i'}}$.

D'après le Lemme 5.4, pour chaque i avec $|J_i|$ pair, on choisit une orbite $S_i^0 \in O_{i,i}$ telle que $\sigma(S_i^0) = S_i^0$ et $|S_i^0| = s_i \cdot |J_i|/2$, où s_i est un entier impair. S'il existe au moins un i_0 tel que $|J_{i_0}|$ est impair, on choisit une orbite $S_{i_0}^1 \in O_{i_0,i_0}$ telle que $\sigma(S_{i_0}^1) = S_{i_0}^1$ pour chaque $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair.

Dans le système des générateurs, on peut remplacer $D_{S_{i_0}^1}$ par $D_{i_0} \otimes D_{i_0}$ (si i_0 existe), pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. On définit $(A_l)_{l=1}^6$:

A_1 est engendré librement par $F \otimes F$, $(F \otimes D_i)_{i \in I, |J_i| \text{ impair}}$ et $(D_{i_0} \otimes D_{i_0})_{i_0 \neq i, |J_i| \text{ impair}}$ (si i_0 existe).

A_2 est engendré librement par $(F \otimes D_i)_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$ et $(D_{S_i^0})_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$.

A_3 est engendré librement par $G \otimes F$.

A_4 est engendré librement par $(D_S)_{S \in O_0}$, où

$$O_0 := \bigcup_{i,i' \in I} O_{i,i'} \setminus \{(\Delta_i)_i, (S_i^0)_{|J_i| \text{ pair}}, (S_i^1)_{i \neq i_0, |J_i| \text{ impair}}\}.$$

A_5 est engendré librement par $(G \otimes D_i)_{i \in I}$ et $(D_{\Delta_i})_{i \in I}$.

A_6 est engendré librement par $G \otimes G$.

On a $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{l=1}^6 A_l$. Puisque $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, $D_{j_i} + D'_{j_i} = F$, $\sigma(S_i^0) = S_i^0$, $\sigma(S_i^1) = S_i^1$, $\sigma(\Delta_i) = \Delta_i$ et O_0 est σ -invariant, on a que $\bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l \subset (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$ est $\text{Gal}(k'/k)$ -invariant pour chaque $l_0 = 1, \dots, 6$.

Il suffit de montrer que $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_{l_0}) = 0$ pour tous les $1 \leq l \leq 6$, où $A'_{l_0} := \bigoplus_{l=1}^{l_0} A_l / \bigoplus_{l=1}^{l_0-1} A_l$.

Pour $l_0 = 1$, si i_0 n'existe pas, on a $A_1 = \mathbb{Z} \cdot (F \otimes F)$ et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1) = 0$.

Supposons que i_0 existe. Soit B_1 un groupe abélien engendré librement par $F \otimes D_{i_0}$ et $F \otimes D'_{i_0}$. Ainsi $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_1) = 0$. Soit B'_1 un sous-groupe de A_1 engendré librement par $|J_{i_0}| F \otimes F$, $F \otimes D_{i_0}$, $|J_{i_0}| F \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair et $D_{i_0} \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Ainsi $|A_1/B'_1| = |J_{i_0}|^M$, où M est le nombre de $i \in I$ avec J_i impair. Donc $|A_1/B'_1|$ est impair. Puisque $F \otimes D'_{i_0} = |J_{i_0}| F \otimes F - F \otimes D_{i_0}$, B_1 est un sous-groupe de B'_1 .

Notons $C_1 := B'_1/B_1$. Ainsi C_1 est engendré librement par $|J_{i_0}| F \otimes D_i$ et $D_{i_0} \otimes D_i$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Puisque

$$\sigma(D_{i_0} \otimes D_i) = D'_{i_0} \otimes D'_i = |J_i| F \otimes D'_{i_0} - |J_{i_0}| F \otimes D_i + D_{i_0} \otimes D_i.$$

Ainsi C_1 est engendré librement par $D_{i_0} \otimes D_i$ et $\sigma(D_{i_0} \otimes D_i)$ pour tous les $i \neq i_0$ avec $|J_i|$ impair. Donc C_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), C_1) = 0$.

Puisque $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_1) = 0$, on a B'_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), B'_1) = 0$. Donc A_1/B'_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1/B'_1) = 0$, parce que $|A_1/B'_1|$ est impair. On a A_1 est $\text{Gal}(k'/k)$ invariant, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A_1) = 0$.

Pour $l_0 = 2$, soit B_2 un groupe abélien engendré librement par l'élément $(\sigma(D_{S_i^0}))_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$ et $(D_{S_i^0})_{i \in I, |J_i| \text{ pair}}$. On a $H^1(\text{Gal}(k'/k), B_2) = 0$. Puisque $\sigma(D_{S_i^0}) - D_{S_i^0}$ est $\Gamma_{k'}$ -invariant, on a

$$\sigma(D_{S_i^0}) - D_{S_i^0} = s_i \cdot F \otimes D_i + |S_i^0|^2 F \otimes F.$$

Ainsi B_2 est un sous-groupe de A'_2 , et $|A'_2/B_2| = \prod_{i \in I, |J_i| \text{ pair}} s_i$. Ainsi $|A'_2/B_2|$ est impair, et donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_2/B_2) = 0$. Ainsi $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_2) = 0$.

Pour $l_0 = 3$, $\sigma(F \otimes G) = F \otimes G' = F \otimes G + \sum_i F \otimes D_i - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F \otimes F$. Donc $(\sigma(F \otimes G) - F \otimes G) \in A_1 \oplus A_2$. Alors l'action de $\text{Gal}(k'/k)$ sur A'_3 est triviale, et donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_3) = 0$.

Soit $(F \otimes E) \in (\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_{k'}}$, où $E \in T^*$. Alors $E \in (T^*)^{\Gamma_{k'}}$. Ainsi E est une combinaison de G , F et $(D_i)_{i \in I}$, alors $(F \otimes E) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$.

Pour $l_0 = 4$, on a $(D'_{j_i} \otimes D'_{j_{i'}}) = D_{j_i} \otimes D_{j_{i'}} + F \otimes (F - D_{j_i} - D_{j_{i'}})$ et donc pour chaque orbite S , $(\sigma(D_S) - D_{\sigma(S)}) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$. Ainsi dans $(\oplus_{l=1}^4 A_l)/(\oplus_{l=1}^3 A_l)$, on a $\sigma(D_S) = D_{\sigma(S)}$. Donc l'action de $\text{Gal}(k'/k)$ sur A'_4 est une permutation, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_4) = 0$.

Pour $l_0 = 5$, en utilisant $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, on trouve

$$(G' \otimes D_i - D_{\Delta_i} - G \otimes D_i) \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_4.$$

Ainsi A'_5 est engendré librement par $G' \otimes D_i$ et $G \otimes D_i$ pour tous les $i \in I$. On a

$$\sigma(G' \otimes D_i) = G \otimes D'_i = -G \otimes D_i + |J_i| G \otimes F.$$

Donc dans A'_5 , on a $\sigma(G' \otimes D_i) = -G \otimes D_i$. Donc $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_5) = 0$.

Pour $l_0 = 6$, en utilisant $G' - G = \sum_i \sum_{j_i} D_{j_i} - \frac{\sum_i |J_i|}{2} F$, on a

$$(\sigma(G \otimes G) - G \otimes G) \in \bigoplus_{l=1}^5 A_l.$$

Donc dans A'_6 , $\sigma(G \otimes G) = G \otimes G$, et $H^1(\text{Gal}(k'/k), A'_6) = 0$. □

6. SURFACES DE DEL PEZZO

Dans cette section, soient X une surface de del Pezzo sur k et \mathcal{T} un tore universel de X . On cherche à contrôler l'exposant de torsion du quotient $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$.

Une surface projective, lisse, géométriquement connexe X est appelée *surface de del Pezzo* si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. Le degré d'une telle surface X est $\deg(X) := (K_X, K_X)$. Par [Koll96, Exercice 3.9], X est alors géométriquement rationnelle, on a $1 \leq \deg(X) \leq 9$ et $\text{Pic}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{10-\deg(X)}$.

Soit X une surface de del Pezzo de degré $d \leq 6$. Soit $r = 9 - d$. Rappelons des résultats dans [Ma, Chapter 4]. On sait ([Ma, Prop. 25.1]) qu'il existe une base $(l_i)_{i=0}^r$ de $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ tels que

$$(l_0, l_0) = 1, \quad (l_i, l_i) = -1 \text{ si } i \neq 0, \quad (l_i, l_j) = 0 \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad \omega = -3l_0 + \sum_{i=1}^r l_i, \quad (6.1)$$

où $\omega := [K_X] \in \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Soit \mathfrak{S}_r le groupe symétrique d'indice r . L'action de \mathfrak{S}_r sur $\{l_i\}_{i=0}^r$, qui préserve l_0 et permute $(l_i)_{i=1}^r$, induit une action de permutation de \mathfrak{S}_r sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Pour $r =$

3, 4, 5, 6, 7, 8, soient R_r le système de racines de type $A_1 \times A_2, A_4, D_5, E_6, E_7, E_8$ respectivement. Par [Ma, Thm. 23.9], on a :

- (1) le groupe de Weyl $W(R_r)$ agit sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et cette action préserve ω et l'intersection ;
- (2) l'action de Γ_k sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$, qui préserve ω et l'intersection, se factorise par le groupe de Weyl $W(R_r)$;
- (3) l'action de \mathfrak{S}_r sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ ci-dessus, qui préserve ω et l'intersection aussi, induit une inclusion canonique $\mathfrak{S}_r \subset W(R_r)$ ne dépendant que du choix de la base $(l_i)_{i=0}^r$.

Proposition 6.1. *Soient X une surface de del Pezzo de degré ≥ 5 et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.*

Démonstration. Par un résultat classique (cf. [Cao, Lem. 3.2]), le Γ_k -module $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est stablement de permutation. D'après (1.1), on a $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})) = 0$. Par le théorème 4.7, il suffit de montrer que l'on a $X(k) \neq \emptyset$ ou que le morphisme $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$ dans le théorème 4.7 (2) est surjectif.

Notons d le degré de X .

Si $d = 5$ ou 7 , par les travaux de Enriques, Châtelet, Manin, Swinnerton-Dyer (voir [CT99, Section 4] ou [VA, Théorème 2.1]), on a $X(k) \neq \emptyset$.

Si $d = 9$, on a $\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Puisque $X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^2$, l'homomorphisme \cup est surjectif.

Si $d = 8$, on a l'une des possibilités suivantes (voir par exemple [AB, Exemples 3.1.3 et 3.1.4]) :

- (i) X est un éclatement de \mathbb{P}_k^2 en un k -point, et dans ce cas, $X(k) \neq \emptyset$.
- (ii) Il existe des coniques lisses C_1, C_2 sur k telles que $X \xrightarrow{\sim} C_1 \times C_2$. Dans ce cas, on a $\text{Pic}(X_{\bar{k}})^{\Gamma_k} = \text{Pic}(X_{\bar{k}})$, $X_{\bar{k}} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\bar{k}}^1$ et donc l'homomorphisme \cup est surjectif.
- (iii) Il existe une extension de corps K/k de degré 2 et une conique C sur K telles que $X \xrightarrow{\sim} R_{K/k} C$, où $R_{K/k}$ désigne la restriction à la Weil de K à k . Dans ce cas, il existe $D_1, D_2 \in \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ tels que Γ_k permute D_1, D_2 et l'intersection de D_1 et D_2 est un point. Alors $D_1 \otimes D_2 \in (\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k}$, $\cup(D_1 \otimes D_2) = 1$ et donc l'homomorphisme \cup est surjectif.

Si $d = 6$, avec les notations ci-dessus, soit (cf. [Ma, §25.5.7])

$$\sigma : \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}}) : \sum_{i=0}^3 a_i l_i \mapsto (a_0 + c) l_0 + \sum_{i=1}^3 (a_i - c) l_i \quad \text{avec} \quad c := a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Puisque $\#W(R_3) = 2^3 3$, on a $W(R_3) \cong \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2 \cdot \sigma$. Soit $L_1 := \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (l_0 - l_i) \otimes (l_0 - l_j)$ et $L_2 := l_0 \otimes (\omega + l_0)$. Puisque l'action de Γ_k se factorise par $W(R_3)$. On peut calculer que $L_1, L_2 \in (\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))^{\Gamma_k}$ et $\cup(L_1) = 3, \cup(L_2) = -2$. Alors \cup est surjectif. \square

Lemme 6.2. *Soient X une surface de del Pezzo de degré $d = 1, 2, 3, 4$ et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors*

$$\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0 \quad \text{pour un nombre premier} \quad \begin{cases} p \neq 2 & \text{si } d = 4 \\ p \neq 2, 3 & \text{si } d = 2, 3 \\ p \neq 2, 3, 5 & \text{si } d = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $r = 9 - d$. Avec les notations ci-dessus, d'après [Ma, §26.6], $\#W(R_r) = 2^7 3 \cdot 5$, $2^7 3^4 5$, $2^{10} 3^4 5 \cdot 7$, $2^{14} 3^5 5^2 7$ pour $d = 4, 3, 2, 1$ respectivement. Alors, pour le premier p dans l'énoncé, tout p -groupe de Sylow de \mathfrak{S}_r est un p -groupe de Sylow de $W(R_r)$. Dans ce cas, l'action de tout p -sous-groupe de $W(R_r)$ sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ est donc de permutation. C'est donc aussi le cas sur $\text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}})$. Par un argument de corestriction-restriction, $H^1(k, \text{Sym}^2 \text{Pic}(X_{\bar{k}}))[p] = 0$ pour tout p dans l'énoncé.

On considère le morphisme dans le théorème 4.7 (2) : $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$. Par la définition, $\cup(\omega \otimes \omega) = 4, 3, 2, 1$ pour $d = 4, 3, 2, 1$ respectivement. On conclut alors avec le théorème 4.7 (2). \square

Remarque 6.3. Sous les hypothèses du lemme 6.2, par la même méthode, on peut montrer le résultat ci-dessous (qui est déjà connu) :

$$\frac{\text{Br}(X)}{\text{Br}(k)}[p] = 0 \quad \text{pour un nombre premier} \quad \begin{cases} p \neq 2 & \text{si } d = 4 \\ p \neq 2, 3 & \text{si } d = 2, 3 \\ p \neq 2, 3, 5 & \text{si } d = 1 \end{cases}$$

Théorème 6.4. Soient X une surface de del Pezzo de degré 3 ou 4 et \mathcal{T} un torseur universel de X . Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0$ pour tout $p \neq 2$.

Démonstration. D'après le lemme 6.2, il suffit de montrer que $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0$ pour toute surface de del Pezzo X de degré 3.

On suppose que le degré de X est 3.

Notons que $T^* := \text{Pic}(X_{\bar{k}})$ et $\text{Sym}^2 T^*$ la deuxième puissance symétrique de T^* . Soient $(l_i)_{i=0}^6$ une base dans (6.1) et ω le fibré à droite canonique de X . Il y a 27 courbes exceptionnelles (les 27 droites) sur $X_{\bar{k}}$. Le groupe Γ_k agit par permutation de ces droites. On les note $(D_i)_{i=1}^{27}$. D'après [Ma, prop. 26.1], on peut supposer $D_i = l_i$ pour $1 \leq i \leq 6$, $D_i = 2l_0 - \sum_{j \neq i-6} l_j$ pour $7 \leq i \leq 12$ et $(D_i)_{i=13}^{27} = (l_0 - l_i - l_j)_{1 \leq i < j \leq 6}$.

Dans $\text{Sym}^2 T^*$, on note :

$$L := (l_0 \otimes l_0) - \sum_{i=1}^6 (l_i \otimes l_i),$$

et on peut calculer que $6L = 5(\omega \otimes \omega) - \sum_{i=1}^{27} (D_i \otimes D_i)$. Donc l'action de Γ_k sur L est triviale.

On considère le morphisme dans le théorème 4.7 (2) : $(\text{Sym}^2 T^*)^{\Gamma_k} \xrightarrow{\cup} CH^2(X_{\bar{k}}) \cong \mathbb{Z}$. Puisque $\cup(\omega \otimes \omega) = 3$ et $\cup(L) = 7$, le morphisme \cup est surjectif. Par le théorème 4.7 (ii), il suffit de montrer que $H^1(k, \text{Sym}^2 T^*)[3] = 0$.

Il existe une matrice $A \in M_{28 \times 28}(\mathbb{Z})$, telle que dans le réseau $\text{Sym}^2 T^*$, de rang 28, on ait l'égalité de vecteurs :

$$[-L, (D_i \otimes D_i)_{i=1}^{27}]^t = A \cdot [(l_i \otimes l_i)_{i=0}^6, (-l_0 \otimes l_i)_{i=1}^6, (l_i \otimes l_j)_{1 \leq i < j \leq 6}]^t. \quad (6.2)$$

Corollaire 6.5. *Soient X une surface de del Pezzo de degré 2. \mathcal{T} un torseur universel de X et \mathcal{T}^c une compactification lisse de \mathcal{T} . Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0$ pour tout $p \neq 2$.*

Démonstration. D'après le lemme 6.2, il suffit de montrer $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0$.

Sous les notations ci-dessus, on a l'inclusion canonique $W(R_6) \subset W(R_7)$ et les 3-sous-groupes de Sylow de $W(R_6)$ et de $W(R_7)$ sont isomorphes pour tout $p \neq 2$.

Dans le cas d'une surface de del Pezzo de degré 2, l'action de Γ_k sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ se factorise par $W(R_7)$, et donc, après conjugaison, il existe une extension de corps $k \subset k'$ avec $([k' : k], p) = 1$ telle que l'action de $\Gamma_{k'}$ sur $\text{Pic}(X_{\bar{k}})$ se factorise par $W(R_6) \subset W(R_7)$. Par [Ma, Cor. 26.7], dans $X_{k'}$, il existe une courbe exceptionnelle définie sur k' , donc il existe une surface de del Pezzo de degré 3 X' sur k' et un k' -morphisme propre, surjectif, birationnel $X_{k'} \rightarrow X'$. D'après le théorème 6.4 et un argument de restriction-inflation, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[3] = 0$. \square

Exemple 6.6. Soit k un corps contenant une racine cubique de l'unité non-triviale. Soit X une surface cubique diagonale d'équation :

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$$

en les variables x, y, z, t , avec $a, b, c, d \in k^\times$. Soit $K := k(\sqrt[3]{b/a}, \sqrt[3]{ad/bc})$. Alors X_K est une K -surface K -rationnelle. D'après le corollaire 2.10, $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}$ est annulé par 9. D'après le théorème 6.4, on a $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))} = 0$.

Théorème 6.7. *Soit X une k -surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathcal{T} \rightarrow X$ un torseur universel sur X et soit \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} . Supposons que la surface X est k -birationnellement équivalente à une surface de del Pezzo de degré ≥ 2 ou à une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique. Alors $\frac{H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}{H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))}[p] = 0$ pour tout $p \neq 2$.*

Démonstration. Soit X une surface fibrée en coniques au-dessus d'une conique C . Il existe une extension K_1/k de degré 2 telle que $C_{K_1} \cong \mathbb{P}_{K_1}^1$. Notons η le point générique de C et X_η sa fibre. Alors X_η est une conique, et donc il définit $[X_\eta] \in \text{Br}(k(C))[2]$. Puisque $\text{Br}(\bar{k}(C)) = 0$, il existe une extension finie galoisienne k'/k tel que $[X_\eta]|_{k'(C)} = 0$. Soient $k \subset K_2 \subset k'$ l'extension correspondant à un p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(k'/k)$. Alors $p \nmid [K_2 : k]$ et, par un argument de restriction-inflation, $[X_\eta]|_{K_2(C)} = 0$. Soit $K := K_1 \cdot K_2$. On a $p \nmid [K : k]$, $C_K \cong \mathbb{P}_K^1$ et $X_\eta \times_k K \cong \mathbb{P}_{K(C)}^1$. Donc X_K est K -rationnelle. D'après le corollaire 2.10, l'énoncé vaut pour une telle surface X .

En général, soit X_1 une surface projective, lisse, géométriquement rationnelle telle que X et X_1 soient birationnellement équivalents. Il existe un torseur universel \mathcal{T}_1^c de X_1 tel que \mathcal{T}^c et \mathcal{T}_1^c soient stablement birationnellement équivalents par [CTS87, Prop. 2.9.2]. Donc $H_{nr}^3(\mathcal{T}^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{nr}^3(\mathcal{T}_1^c, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et on peut remplacer X par X_1 . D'après la proposition 6.1, le théorème 6.4, le corollaire 6.5 et le résultat ci-dessus, on en découle. \square

Remerciements. Nous remercions Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions.

RÉFÉRENCES

- [AB] Asher Auel, Marcello Bernardara : *Semiorthogonal decompositions and birational geometry of del Pezzo surfaces over arbitrary fields*, <http://arxiv.org/abs/1511.07576>.
- [BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne : *Faisceaux pervers*, Astérisque, 100, Soc. Math. France (1982).
- [Cao] Y. Cao : *Cohomologie non ramifiée de degré 3 : variétés cellulaires et surfaces de del Pezzo de degré au moins 5*, arXiv : 1607.01739.
- [CX] Y. Cao, F. Xu : *Strong Approximation with Brauer-Manin Obstruction for Toric Varieties*, arXiv : 1311.7655.
- [CT83] J.-L. Colliot-Thélène : *Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. 71 (1983) 1–20.
- [CT91] J.-L. Colliot-Thélène : *Cycles algébriques de torsion et K -théorie algébrique*, in Arithmetic Algebraic Geometry (CIME, Trento, 1991, E. Ballico, ed.) J.-L. Colliot-Thélène, K. Kato, P. Vojta, Springer L.N.M. 1553 (1993) p. 1–49.
- [CT95] J.-L. Colliot-Thélène : *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, in K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 58, Part I (1995) 1–64.
- [CT99] J.-L. Colliot-Thélène : *Points rationnels sur les variétés non de type général. Chapitre II : Surfaces rationnelles*, notes 1999.
- [CT15] J.-L. Colliot-Thélène : *Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015) 195–220.
- [CTHK] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler, B. Kahn : *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, in Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), 31–94, Fields Inst. Commun., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [CTHS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, A. N. Skorobogatov : *Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)*, Expositiones mathematicae 23 (2005) 161–170.
- [CTS77] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C.R.A.S. Paris t.284 (1977) 967–970.
- [CTS80] J.-L. Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (Juillet 1979), édité par A. Beauville, Sijthof and Noordhof (1980) 223–237.
- [CTS81] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. 48 (1981) 421–447.
- [CTS87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J. 54 (1987) 375–492.
- [CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer : *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. fr die reine und angew. Math. 374 (1987) 72–168.
- [EKL] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine, E. Viehweg : *The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), no. 1, 73–118.
- [F] L. Fu : *Étale cohomology theory*, Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 13, World Scientific, 2011.
- [Fu84] W. Fulton : *Intersection theory*, Springer, 1984.
- [Fu93] William Fulton : *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton N.J. (1993).
- [HS] D. Harari, A. Skorobogatov : *The Brauer group of torsors and its arithmetic applications*, The Brauer group of torsors and its arithmetic applications, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) t. 53, no. 7 (2003) 1987–2019.

- [Ka96] B. Kahn : *Applications of weight-two cohomology*, Doc. Math. 1 (1996) no 17, 395–416.
- [Ka97] B. Kahn : *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic K-theory (Seattle, 1997), Proc. Symposia Pure Math. 67, AMS, Providence, 1999, 149–174.
- [Koll96] J. Kollár : *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 32, Springer, Berlin, 1996.
- [KS] M. Kashiwara, P. Schapira : *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [L87] S. Lichtenbaum : *The construction of weight-two arithmetic cohomology*, Invent. math. 88 (1987) 183–215.
- [L90] S. Lichtenbaum : *New results on weight-two motivic cohomology*, The Grothendieck Festschrift, vol. 3, Progress in Math. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, 35–55.
- [Ma] Y. Manin : *Cubic forms, Algebra, Geometry, Arithmetic*, North Holland, 1986.
- [Me03] A. Merkurjev : *Rost invariants of simply connected algebraic groups*, in Cohomological Invariants in Galois Cohomology, S. Garibaldi, A. Merkurjev, J-P. Serre, University Lecture Series 28 (2003), American Math. Soc.
- [Me08] A. Merkurjev : *Unramified elements in cycle modules*, J. London Math. Soc., 78 (2008), 51–64.
- [Me13] A. Merkurjev : *Weight two motivic cohomology of classifying spaces for semisimple groups*, 2013. To appear in American Journal of Math.
- [Oda] T. Oda : *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A series of modern surveys in mathematics, 15, 1987.
- [Pi11] A. Pirutka *Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis*, Algebra and Number Theory 5-6 (2011) 803–817.
- [S] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, J. reine angew. Math., 327, 1981, 12–28.
- [Sko] A. Skorobogatov : *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics 144 (2001), Cambridge University Press.
- [Su] H. Sumihiro : *Equivariant completion I*, J. Math. Kyoto Univ., 14, 1974, 1–28.
- [VA] Anthony Várilly-Alvarado : *Arithmetic of del Pezzo surfaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic (F. Bogomolov, B. Hassett and Y. Tschinkel eds.) Simons Symposia 1 (2013), 293–319.

YANG CAO

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY
UNIV. PARIS-SUD, CNRS, UNIV. PARIS-SACLAY
91405 ORSAY, FRANCE

E-mail address: yang.cao@math.u-psud.fr